A C A D E M I A V I R T U A L - A Q J

TRIGONOMETRÍA

ALFREDO QUISPE JAUREGUI

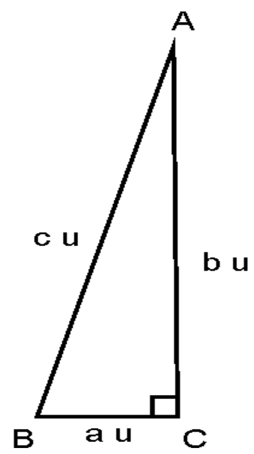
Trigonometría

SEMANA Nº 3

1. En un triángulo rectángulo ABC, recto en C, se cumple que $\text{senA}+4\text{senB}-4=0$; halle $\text{tgB}+\csc A$.

A) 6 B) 5 C) 3 D) 3,5 E) 4

Solución:



$$\text{senA}+4\text{senB}-4=0 \Rightarrow \frac{a}{c}+\frac{4b}{c}=4 \Rightarrow a+4b=4c$$

$$(a+4b)^2=(4c)^2 \Rightarrow a^2+16b^2+8ab=16c^2$$

$$\Rightarrow a^2+16b^2+8ab=16\left(a^2+b^2\right)$$

$$\Rightarrow 15a^2-8ab=0$$

Así $\frac{a}{b}=\frac{8k}{15k} \quad \Rightarrow \quad c=17k$

$$\therefore \quad \text{tgB}+\csc A=\frac{15}{8}+\frac{17}{8}=4.$$

Rpta.:E

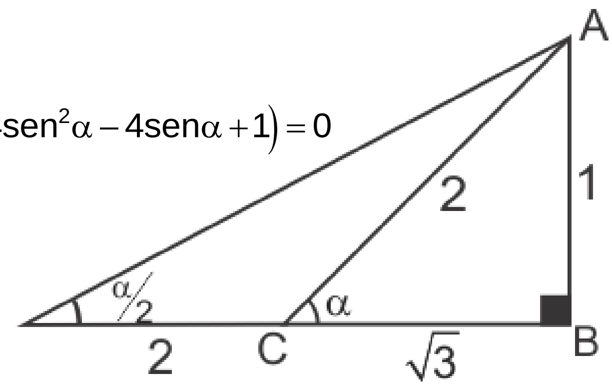
2. Un ángulo α agudo satisface la ecuación $4\text{sen}^3\alpha-3\text{sen}\alpha+1=0$; calcule el valor de $\left(2+\sqrt{3}\right)\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)-2\cos\alpha-1$.

A) $\sqrt{3}-1$ B) $\sqrt{3}+1$ C) $-\sqrt{3}$ D) 1 E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Solución:

$$4\text{sen}^3\alpha-3\text{sen}\alpha+1=0 \Rightarrow \cancel{(\text{sen}\alpha+1)}\left(4\text{sen}^2\alpha-4\text{sen}\alpha+1\right)=0$$

$$\Rightarrow \text{sen}\alpha=\frac{1}{2}$$



$$\left(\sqrt{2}+3\right)\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)-2\cos\alpha+1$$

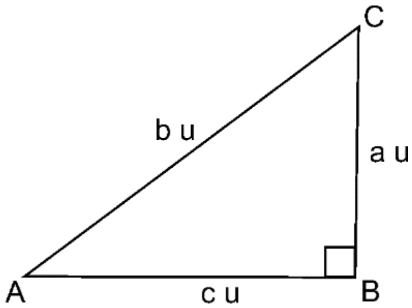
$$\left(\sqrt{2}+3\right)\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)-2\frac{\sqrt{3}}{2}-1=-\sqrt{3}.$$

Rpta.:C

3. Halle el mayor perímetro del triángulo rectángulo, que no exceda a 160 u, si la suma del valor de la tangente de uno de sus ángulos agudos con el valor de la cosecante del otro ángulo agudo es 5. (Las longitudes de los lados del triángulo son expresados por números enteros.)

A) 150 u B) 140 u C) 155 u D) 159 u E) 145 u

Solución:



$$\text{tg}B + \csc C = 5 \Rightarrow \frac{b}{c} + \frac{a}{c} = 5$$

$$\begin{cases} a + b = 5c \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow (5c - b)^2 = b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow\ 25c^2 - 10bc + b^2 = b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow\ 12c^2 - 5bc = 0$$

$$\Rightarrow\ \cancel{c = 0} \quad \vee \quad c = \frac{5}{12}b$$

Luego $a = \frac{13}{12}b$

$$a + b + c = \frac{30}{12}b.\ \text{Luego si } b = 60,\ a + b + c = 150 < 160.$$

Rpta.:A

4. Con los datos de la figura, si $\text{tg}\beta = 2\sqrt{3}$; halle $\sqrt{13}\cos\beta + \sqrt{3}\text{ctg}\alpha$.

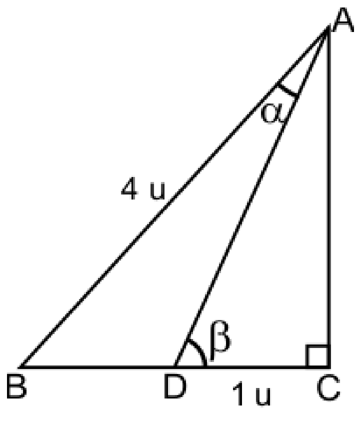
A) $\frac{4}{3}$

B) 4

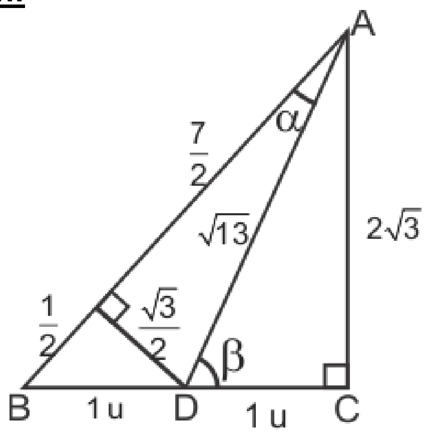
C) $\frac{5}{2}$

D) 8

E) 6



Solución:



$\text{tg}\beta = 2\sqrt{3}$

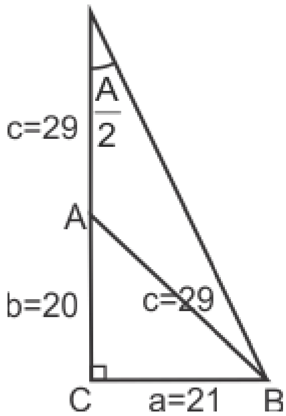
$\sqrt{13}\cos\beta + \sqrt{3}\,\text{ctg}\alpha = 8$.

Rpta.:D

5. En un triángulo rectángulo, se cumple que la diferencia de las longitudes de la hipotenusa con uno de los catetos es $8\ u$ y con el otro cateto es $9\ u$; determine el valor de la tangente de la mitad del mayor ángulo agudo de dicho triángulo.

A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{24}{25}$ C) $\frac{21}{20}$ D) $\frac{30}{17}$ E) $\frac{41}{40}$

Solución:



Del gráfico: $a > b$

Del dato:

$c - a = 8 \ \Rightarrow\ a = c - 8$

$c - b = 9 \ \Rightarrow\ b = c - 9$

Por Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$

$(c-8)^2 + (c-9)^2 = c^2 \Rightarrow c^2 - 34c + 145 = 0 \Rightarrow \cancel{c=5} \vee c = 29$

Luego $a = 21 \ \wedge\ b = 20 \ \Rightarrow\ \text{tg}\frac{A}{2} = \frac{3}{7}$

Rpta.:A

6. En un triángulo rectángulo ACB, recto en C, si $3\sec B = 5\cos A$, halle el valor de la expresión $3(\text{sen}B\csc A + \cos B\sec A)$.

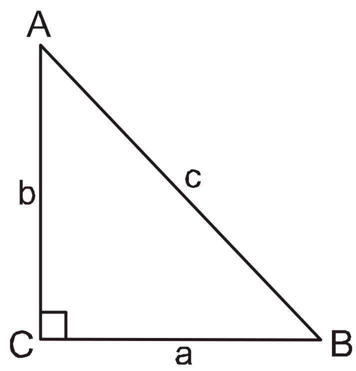
A) $\frac{7}{3}$ B) 4 C) 5 D) $\frac{3}{5}$ E) 3

Solución:

1) En el triángulo de la figura,

$$3\sec B = 5\cos A \quad \Rightarrow \quad 3\left(\frac{c}{b}\right) = 5\left(\frac{a}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c^2}{ab}=\frac{5}{3} \quad \cdots\cdots \ (1)$$



2) $$3(\mathrm{sen}B\csc A+\cos B\sec A)=3\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$$
$$=3\left(\frac{b^2+a^2}{ab}\right)$$
$$=3\left(\frac{c^2}{ab}\right) \text{ por (1)}$$
$$=3\left(\frac{5}{3}\right)=5.$$

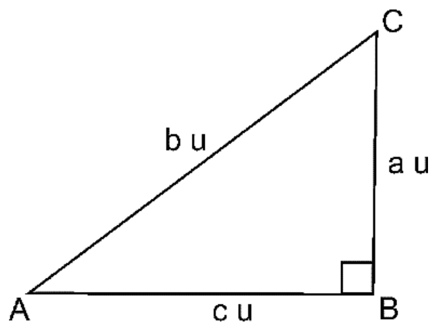
Rpta.:C

7. Con los datos de la figura, si $4a\,\mathrm{tg}A + b\csc C = 4b\cos A$; halle el valor de $\csc A.\csc C$.

A) $\frac{8\sqrt{15}}{15}$ B) $\frac{5\sqrt{17}}{17}$

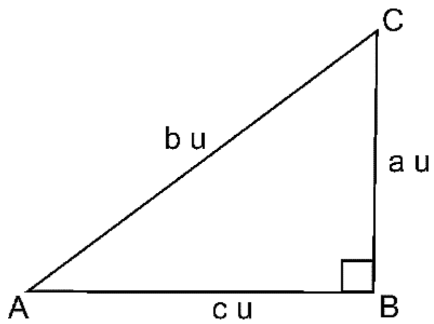
C) $\frac{4\sqrt{15}}{15}$ D) $\frac{6\sqrt{13}}{13}$

E) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$



Solución:

$$\begin{cases} b^2=a^2+c^2 \\ 4a\left(\frac{a}{c}\right)+b\left(\frac{b}{c}\right)=4\left(\frac{c}{b}\right)b \quad \Rightarrow \quad 4a^2+b^2=4c^2 \end{cases}$$



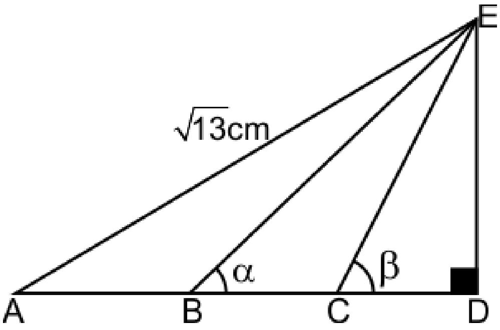
Luego

$$4a^2+a^2+c^2=4c^2 \ \Rightarrow \ 5a^2=3c^2 \ \Rightarrow \ \frac{a}{c}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \quad \csc A.\csc C=\frac{b^2}{ac}=\frac{a^2+c^2}{ac}=\frac{a}{c}+\frac{c}{a}=\frac{8\sqrt{15}}{15}.$$

Rpta.:A

8. En la figura, B y C son los puntos de trisección de $\overline{AD}$ $(AD > DE)$. Si el área de la región triangular BCE es un centímetro cuadrado, calcule $tg\alpha + tg\beta$.



A) 3 B) 2

C) 2,5 D) 3,5

E) 4

Solución:

$AB = BC = CD = x$ cm, sea $DE = y$ cm

$Area_{\triangle BCE} = \dfrac{1}{2}xy = 1 \quad \Rightarrow \quad xy = 2$

Por Pitágoras en el $\triangle AED$:

$\left(\sqrt{13}\right)^2 = (3x)^2 + y^2 \Rightarrow 13 = 9x^2 + y^2$

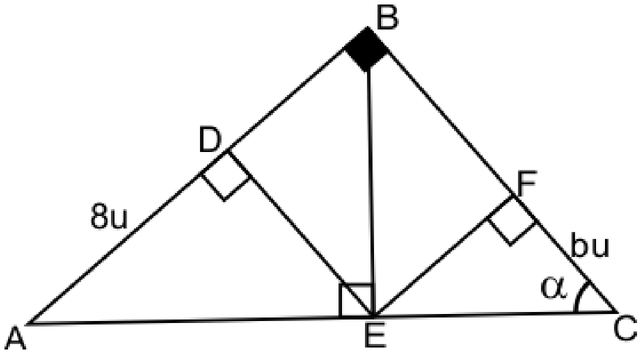
$$\Rightarrow 13 = 9\left(\frac{2}{y}\right)^2 + y^2 \Rightarrow y^4 - 13y^2 + 36 = 0$$

$y^2 = 9\,, y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \cancel{y=3}\,,\ y = 2$ (Para que se verifique que $AD > DE$)

$\therefore \quad tg\alpha + tg\beta = 2 + 1 = 3$.

Rpta.:A

9. Con los datos de la figura, si $tg\alpha = \dfrac{a}{b}$; calcule el valor de $\dfrac{a^3}{b^2}$.



A) 8

B) 2

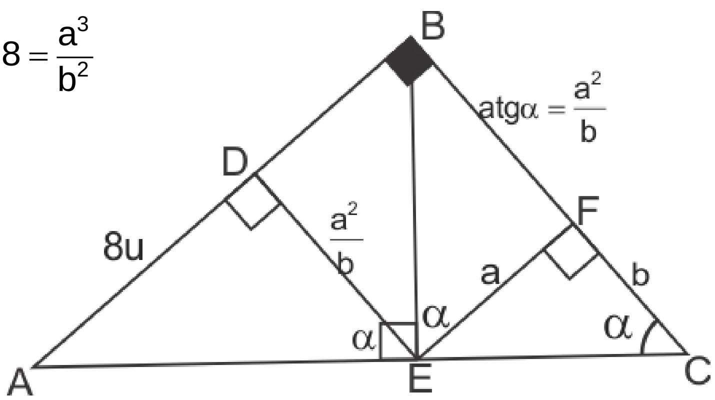
C) 4

D) 7

E) 1

Solución:

$$8 = \frac{a^2}{b}\text{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad 8 = \frac{a^3}{b^2}$$



Rpta.:A

10. En la figura, el área del cuadrado ABCD es $100\ \text{m}^2$ y $BE = 2FD = 4\ \text{m}$. Halle $\sqrt{29}\ CM$.

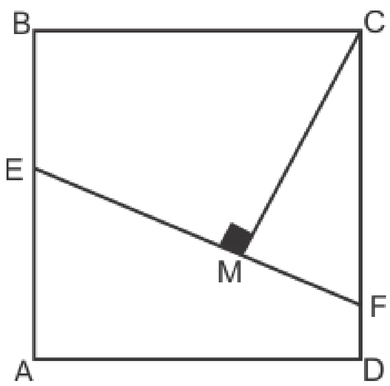
A) $40\ \text{m}$

B) $11\sqrt{13}\ \text{m}$

C) $36\ \text{m}$

D) $10\sqrt{13}\ \text{m}$

E) $42\ \text{m}$



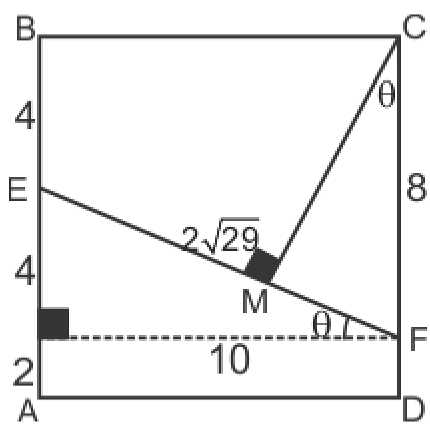
Solución:

Del gráfico, por teorema de Pitágoras

$$EF^2 = 4^2 + 10^2 \quad \Rightarrow \quad EF = 2\sqrt{29}\ \text{m}$$

Luego:

$$\cos\theta = \frac{10}{2\sqrt{29}} = \frac{CM}{8} \Rightarrow \sqrt{29}CM = 40\ \text{m}$$



Rpta.:A

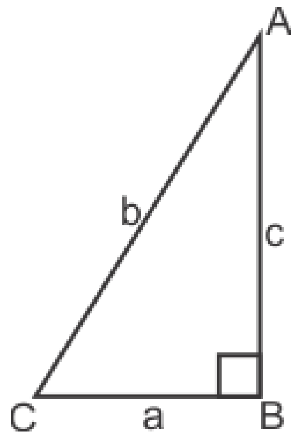
EJERCICIOS DE EVALUACIÓN

1. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B; si $\dfrac{tgA + tgC}{\sec A - senC} = 8$, halle el valor de $\left(ctg^2A + 2senA\right)^{\cos C}$.

A) 1 B) 3 C) 5 D) 2 E) $\dfrac{1}{2}$

Solución:

De la condición



$$\frac{tgA + tgC}{\sec A - senC} = 8 \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{a}{c}+\frac{c}{a}}{\frac{b}{c}-\frac{c}{b}} = 8 \Rightarrow \frac{\left(a^2+c^2\right)bc}{\left(b^2-c^2\right)ac} = 8$$

Usando el teorema de Pitágoras $\Rightarrow$ $\dfrac{b^2\left(bc\right)}{a^2\left(ac\right)} = 8$

$\Rightarrow \quad b = 2k;\ a = k;\ c = k\sqrt{3}$

Luego, $\left(ctg^2A + 2senA\right)^{\cos C} = \left(\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = 2$.

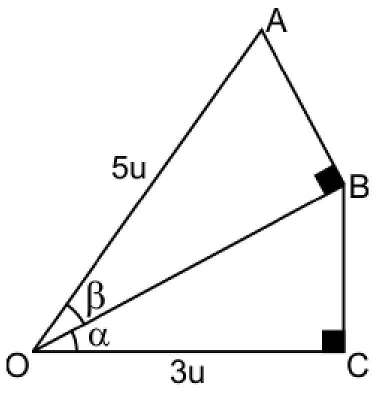
Rpta.:D

2. En la figura se verifica que $\dfrac{sen\beta}{sen\alpha} = \dfrac{OB}{OA}$. Halle $\sqrt{17}\sec\alpha - 2\sqrt{2}\csc\beta$.

A) $\dfrac{15}{4}$ B) $-\dfrac{14}{3}$

C) $\dfrac{5}{3}$ D) $\dfrac{2}{3}$

E) $\sqrt{17} - \sqrt{2}$



Solución:

$$\frac{sen\beta}{sen\alpha} = \frac{OB}{OA} \quad \Rightarrow \quad OA\left(sen\beta\right) = OB\left(sen\alpha\right) \quad \Rightarrow \quad 5sen\beta = OB\left(sen\alpha\right).....(i)$$

$\triangle OBC:\ \operatorname{sen}\alpha=\dfrac{BC}{OB} \quad\Rightarrow\quad BC=OB(\operatorname{sen}\alpha)......(ii)$

$\triangle AOB:\ \operatorname{sen}\beta=\dfrac{AB}{5} \quad\Rightarrow\quad AB=5\operatorname{sen}\beta......(iii)$

De (i),(ii) y (iii) $\Rightarrow\ AB=BC$

$\ell=AB=BC,\ z=OB$.

Por el teorema de Pitágoras en $\triangle AOB$ y $\triangle OBC$:

$25=\ell^2+z^2$ y $z^2=\ell^2+3^2 \ \Rightarrow\ \ell=2\sqrt{2}\ \wedge\ z=\sqrt{17}$

$$\sqrt{17}\sec\alpha-2\sqrt{2}\csc\beta=\sqrt{17}\left(\frac{\sqrt{17}}{3}\right)-2\sqrt{2}\left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{17}{3}-5=\frac{2}{3}.$$

Rpta.:D

3. En la figura se cumple que $25a-3c=73b+14$. Si $\operatorname{sen}A-3\operatorname{sen}B=\dfrac{3}{25}$, calcule $\operatorname{tg}A$.

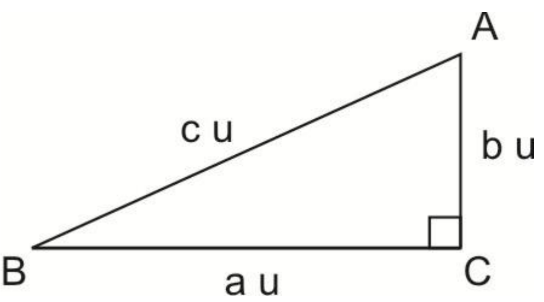
A) $\dfrac{24}{7}$

B) $\dfrac{1}{7}$

C) $\dfrac{21}{5}$

D) $\dfrac{12}{5}$

E) $\dfrac{5}{12}$



Solución:

$$\frac{a}{c}-3\frac{b}{c}=\frac{3}{25} \quad\Rightarrow\quad 25a-75b=3c \quad\Rightarrow\quad \underbrace{25a-3c}_{73b+14}=75b \quad\Rightarrow\quad b=7$$

Entonces

$$\begin{cases}25a-3c=7(75)\\ a^2+49=c^2\end{cases} \quad\Rightarrow\quad a=24,c=25$$

Rpta.:A

4. En la figura, ABCD es un cuadrado; calcule el valor de $25\ \text{tg}\theta$.

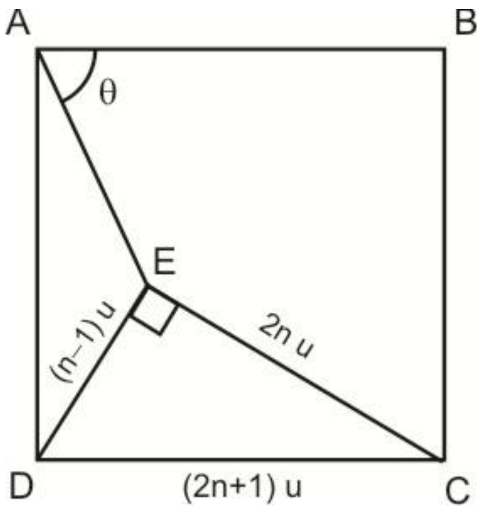
A) 109

B) 125

C) 119

D) 129

E) 113



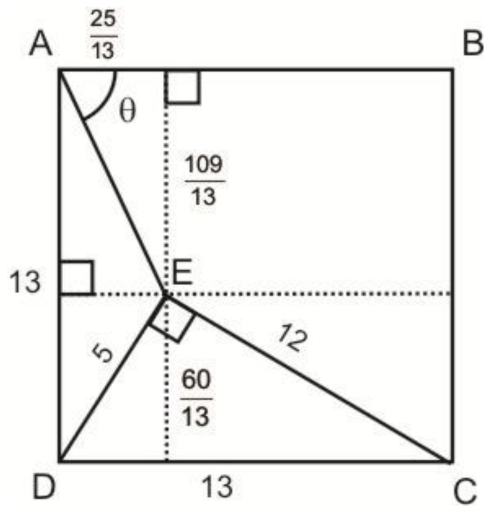
<u>Solución:</u>

Por teorema de Pitágoras:

$$(2n+1)^2 = (n-1)^2 + (2n)^2 \quad \Rightarrow \quad n = 6$$

Luego

$$\text{tg}\theta = \frac{109}{25} \quad \Rightarrow \quad 25\text{tg}\theta = 109.$$



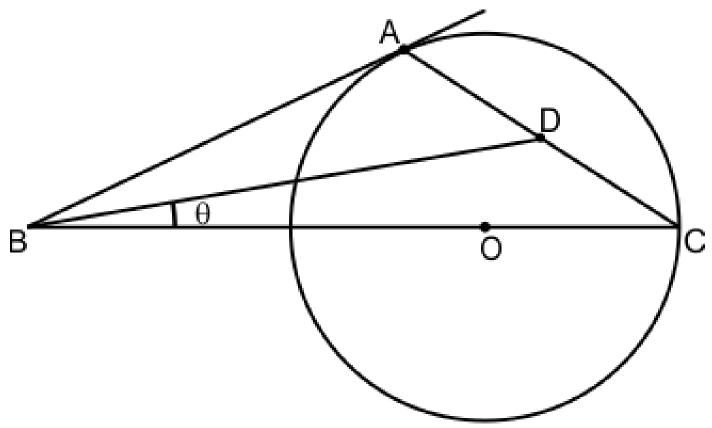
Rpta.:A

5. En la figura, O es centro de la circunferencia. Si A es punto de tangencia, $AD = DC$, $m\sphericalangle ABC = \alpha$ y $\text{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$, calcule $\text{ctg}\theta$.

A) $\dfrac{8}{3}$ B) $\dfrac{14}{3}$

C) $\dfrac{7}{2}$ D) $\dfrac{21}{4}$

E) 7

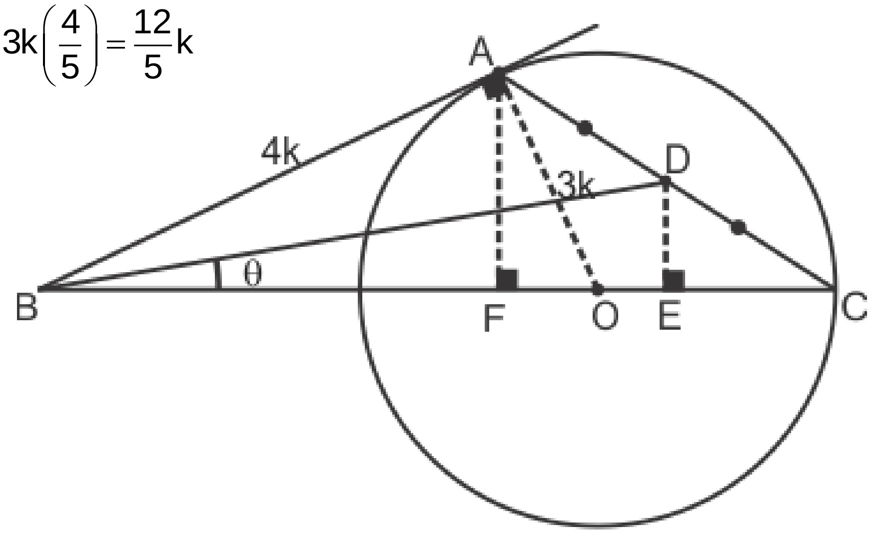


Solución:

En $\triangle BAO$ se tiene $BO = 5k$, además $OC = OA = 3k$

En $\triangle AFO$ se tiene $m\measuredangle FAO = \alpha$

Entonces $AF = 3k\cos\alpha = 3k\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{12}{5}k$



$\Rightarrow \quad DE = \frac{6}{5}k$

$FD = 3k\,\text{sen}\alpha = \frac{9}{5}k$

Luego

$FC = \frac{9}{5}k + 3k = \frac{24}{5}k$

$\Rightarrow \quad EC = \frac{FC}{2} = \frac{12}{5}k$

$BE = 8k - \frac{12}{5}k = \frac{28}{5}k \quad \Rightarrow \quad$ En $\triangle BED$: $\text{ctg}\theta = \frac{BE}{DE} = \frac{14}{3}$.

Rpta.:B